

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD — MHA 021

6 APRIL 2018

Tid och plats:	14 ⁰⁰ – 18 ⁰⁰ i M-huset
Hjälpmedel:	Ordböcker, lexikon och typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505. Besöker sal 15 ⁰⁰ samt 17 ⁰⁰ .
Lösningar:	Anslås på anslagstavlan, avdelningen för dynamik.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 23/4 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast vecka 17 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	torsdag 26/4 12 ⁰⁰ –13 ⁰⁰ , inst.lokal, plan 3 i Nya M-huset.

Lösningar

Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid bedömningen av en lösning.
- **Förklara/definiera införda beteckningar.**
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

Betrakta det sfäriska värmeledningsproblemet

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{dr} \left[kr^2 \frac{du}{dr} \right] &= 0 & r_1 < r < r_2 \\ q(r_1) &= -\alpha(u(r_1) - u_1) \\ u(r_2) &= u_2 \end{aligned} \right\}$$

där r är en oberoende variabel och $u = u(r)$ den obekanta temperaturen. Vidare är u_1 och u_2 givna temperaturer, samt k och α bekanta konstitutiva konstanter. Givet $u(r)$ kan värmeflödet $q(r)$

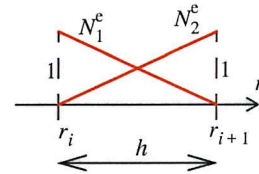
beräknas enligt Fouriers lag: $q = -k \frac{du}{dr}$

a: Härled den svaga formen (variationsproblemet) av randvärdesproblemet och gör sedan en finit-elementformulering med testfunktioner enligt Galerkins metod. (3p)

b: Betrakta nu en styckvis lineär approximation $u_h(r)$ av den primärt obekanta $u(r)$: $u_h \approx u$. På ett element i intervallet $r_i \leq r \leq r_{i+1}$ har vi då

två basfunktioner, nämligen $N_1^e = \frac{r_{i+1} - r}{h}$ och $N_2^e = \frac{r - r_i}{h}$, där

$h = r_{i+1} - r_i$ är elementlängden. Härled elementstyvhetsmatrisen. (2p)



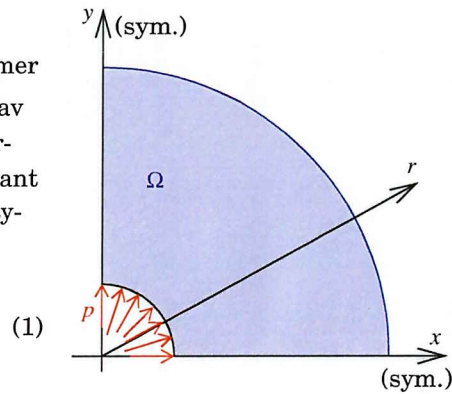
c: Lös problemet med två lika långa element. (3p)

Data: $r_1 = 1,0 \text{ m}$ $r_2 = 3,0 \text{ m}$ $u_1 = 0^\circ\text{C}$ $u_2 = -10^\circ\text{C}$ $k = 3,00 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$ $\alpha = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$

d: Använd FE-approximationen för att beräkna värmeflödet $q(r_1)$ dels med Fouriers lag, dels med hjälp av randvillkoret. Vilket av de två värden på $q(r_1)$ kan förväntas vara närmast den analytiska lösningen? Motivera svaret. (1p)

Man vill bestämma de spänningar $\sigma = D(\tilde{\nabla}u)$ som uppkommer i ett tjockväggigt rör som belastas av ett inre tryck p . Två av symmetrilinjerna utnyttjas, så att bara 1/4-del av ett tvärsnitt modelleras (se figur). Om tjockleken t i z -led är konstant och plan spänning antas, så kan den svaga formen av de styrande differentialekvationerna skrivas

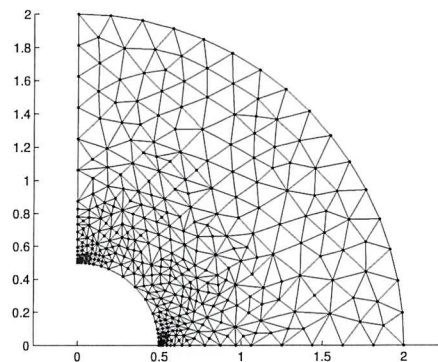
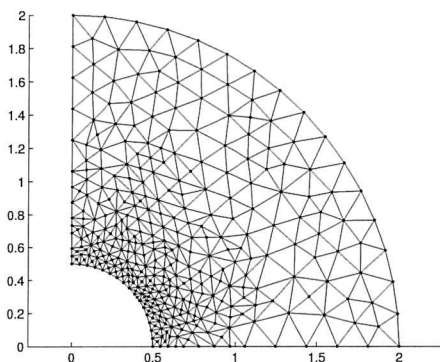
$$\int_{\Omega} (\tilde{\nabla}v)^T D \tilde{\nabla}u d\Omega = \oint_{\Gamma} v^T t d\Gamma \quad (1)$$



Här betecknar Ω och Γ området respektive randen. Vidare är D en given konstitutiv matris (symmetrisk och positivt definit), $v = [v_x \ v_y]^T$ är en vektor med testfunktioner, $u = [u_x \ u_y]^T$ är den obekanta förskjutningsvektorn, $t = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y \\ \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y \end{bmatrix}$ är traktionvektorn och $\tilde{\nabla}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$.

Observera att i (1) har vi inte infört randvillkoren.

- Ange för detta fall samtliga randvillkor. Utveckla sedan randintegralen i (1) med hänsyn till randvillkoren samt med beaktande av villkoren på testfunktionerna. (2p)
- FE-formulera problemet — ta hänsyn till randvillkoren. Av din lösning ska det framgå hur den obekanta vektorn u approximeras. Visa också hur B^c -matrisen ser ut för ett 3-nods element. (2p)
- Antag att området delas in i lineära triangel-element som alla är ungefär lika stora, och att sedan en adaptiv h -metod används i analysen. Vilket av de två elementnäten nedan, det **vänstra** eller **högra**, ska man förvänta sig bli resultatet? Motivera ditt svar. (2p) **Ledning:** teoretiskt varierar alla noll-skilda spänningar som $\sigma_{ij} = c_{ij1} + \frac{c_{ij2}}{r}$, där c_{ij1} och c_{ij2} är konstanter, och r är avståndet från centrum.



- Diskretiseringsfelet definieras vanligen som $e = u - u_h$. Förekommer det något annat diskretiseringsfel i det behandlade problemet? I så fall vilket? (1p)

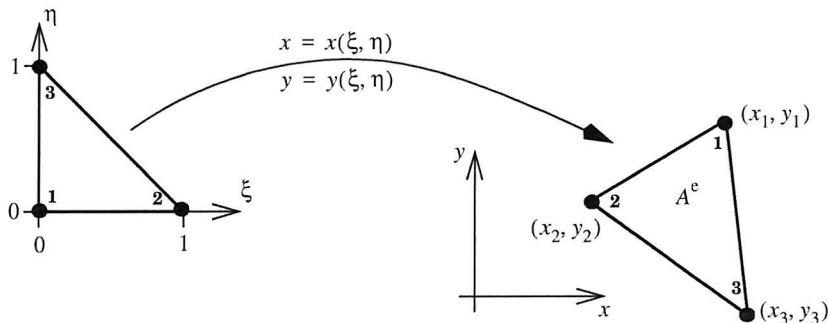
3

Figuren nedan visar en isoparametrisk avbildning av ett lineärt triangel-element, från ett lokalt koordinatsystem (ξ, η) till $(x, y) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$. I det lokala koordinatsystemet ges basfunktionerna av

$$N_1^e = 1 - \xi - \eta \quad N_2^e = \xi \quad N_3^e = \eta$$

a: Visa hur derivatorna $\frac{\partial N_i^e}{\partial x}$ och $\frac{\partial N_i^e}{\partial y}$ ($i = 1, 2, 3$) kan beräknas. Beräkna också dessa derivator för någon av basfunktionerna ($i = 1, 2$ eller 3); svaret ska ges i termer av hörn-koordinaterna (x_i, y_i) . (3p)

b: Beräkna elementarean $A^e = \int_{A^e} dA$ uttryckt i koordinaterna (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$. (1p)



Lösning 1a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v(r)$ och integrera över intervallet

$$-\int_{r_1}^{r_2} v \frac{d}{dr} \left[kr^2 \frac{du}{dr} \right] dr = 0$$

Partialintegrera och utveckla randtermerna

$$\begin{aligned} 0 &= - \left[kr^2 v \frac{du}{dr} \right]_{r_1}^{r_2} + \int_{r_1}^{r_2} kr^2 \frac{dv}{dr} \frac{du}{dr} dr = \left\{ k \frac{du}{dr} = -q \right\} = [r^2 v q]_{r_1}^{r_2} + \int_{r_1}^{r_2} kr^2 \frac{dv}{dr} \frac{du}{dr} dr \\ &= r_2^2 v(r_2) q(r_2) - r_1^2 v(r_1) q(r_1) + \int_{r_1}^{r_2} kr^2 \frac{dv}{dr} \frac{du}{dr} dr = r_2^2 v(r_2) q(r_2) + \alpha r_1^2 v(r_1) (u(r_1) - u_1) + \int_{r_1}^{r_2} kr^2 \frac{dv}{dr} \frac{du}{dr} dr \end{aligned}$$

Värmeflödet vid $r = r_2$, $q(r_2) = -k \frac{du}{dr} \Big|_{r=r_2}$, är inte känt, så vi begränsar valet av testfunktion till sådana som uppfyller $v(r_2) = 0$. Variationsproblemet blir då

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} kr^2 \frac{dv}{dr} \frac{du}{dr} dr + \alpha r_1^2 v(r_1) u(r_1) &= \alpha r_1^2 v(r_1) u_1 \\ u(r_2) &= u_2, \quad v(r_2) = 0 \end{aligned}$$

FE-formulering: approximera $u \approx u_h = Na$, där $N = [N_1(r) \dots N_n(r)]$ är en radvektor med valda basfunktioner och $a = [a_1 \dots a_n]^T$ är en kolumnvektor med (obekanta) nodvariabler. Vi behöver n ekvationer för att bestämma a ; detta erhålls om vi väljer n olika (dvs lineärt oberoende) testfunktioner. Med Galerkins metod väljs $v = N_1, v = N_2, \dots, v = N_n$. Vi sätter in approximationen $u_h = Na$ i variationsproblemet och samlar ekvationerna radvis och får då

$$\int_{r_1}^{r_2} kr^2 \left(\frac{dN}{dr} \right)^T \frac{dN}{dr} dr a + \alpha r_1^2 N^T(r_1) N(r_1) a = \alpha r_1^2 N^T(r_1) u_1$$

eller $(K + K_c)a = f$, där

$$K = \int_{r_1}^{r_2} kr^2 \left(\frac{dN}{dr} \right)^T \frac{dN}{dr} dr \quad K_c = \alpha r_1^2 N^T(r_1) N(r_1) \quad f = \alpha r_1^2 N^T(r_1) u_1$$

Lösning 1b: Bidraget till styvhetsmatrisen K från ett element fås som

$$K^e = \int_{r_i}^{r_{i+1}} kr^2 \left(\frac{dN^e}{dr} \right)^T \frac{dN^e}{dr} dr = \left\{ \frac{dN^e}{dr} = \begin{bmatrix} -1/h & 1/h \end{bmatrix} \right\} = \frac{k}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^2 dr = \frac{k(r_{i+1}^3 - r_i^3)}{3h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning 1c: Med två lineära element har vi tre noder. Om noder och element numreras från vänster till höger, har vi nodkoordinaterna $r_{1n} = 1$ m, $r_{2n} = 2$ m och $r_{3n} = 3$ m. Vidare är elementlängden $h = 1$ m. Elementstyvhetsmatriserna är då

$$K^{e=1} = \frac{k(r_{2n}^3 - r_{1n}^3)}{3h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad K^{e=2} = \frac{k(r_{3n}^3 - r_{2n}^3)}{3h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

och assemblering ger

$$K = K^{e=1} + K^{e=2} = \frac{k}{3h^2} \left(\begin{bmatrix} r_{2n}^3 - r_{1n}^3 & -(r_{2n}^3 - r_{1n}^3) & 0 \\ -(r_{2n}^3 - r_{1n}^3) & r_{2n}^3 - r_{1n}^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{3n}^3 - r_{2n}^3 & -(r_{3n}^3 - r_{2n}^3) \\ 0 & -(r_{3n}^3 - r_{2n}^3) & r_{3n}^3 - r_{2n}^3 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{k}{3h^2} \begin{bmatrix} r_{2n}^3 - r_{1n}^3 & -(r_{2n}^3 - r_{1n}^3) & 0 \\ -(r_{2n}^3 - r_{1n}^3) & r_{2n}^3 - r_{1n}^3 & -(r_{3n}^3 - r_{2n}^3) \\ 0 & -(r_{3n}^3 - r_{2n}^3) & r_{3n}^3 - r_{2n}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -7 & 0 \\ -7 & 26 & -19 \\ 0 & -19 & 19 \end{bmatrix}$$

Vidare har vi

$$K_c = \alpha r_1^2 N^T(r_1) N(r_1) = \alpha r_1^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad f = \alpha r_1^2 N^T(r_1) u_1 = \alpha r_1^2 u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

så

$$(K + K_c)a = f \Rightarrow \begin{bmatrix} 17 & -7 & 0 \\ -7 & 26 & -19 \\ 0 & -19 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Härnäst inför vi randvillkoret $a_3 = u_2 = -10$ och noterar att sista ekvationen inte är giltig eftersom den erhållits med testfunktionen $v = N_3$, som inte uppfyller villkoret $v(r_2) = 0$. Vi har då

$$\begin{bmatrix} 17 & -7 & 0 \\ -7 & 26 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 17 & -7 \\ -7 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -190 \end{bmatrix}$$

Vi har då lösningen $a = [-3,38 \ -8,22 \ -10]^T$

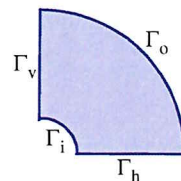
Lösning 1d: Med Fouriers lag får vi $q(r_1) = -k \frac{du}{dr} \Big|_{r=r_1} \approx -k \frac{du_h}{dr} \Big|_{r=r_1} = -k \frac{a_2 - a_1}{h} = 14,5$

Randvillkoret ger $q(r_1) = -\alpha(u(r_1) - u_1) \approx -\alpha(u_h(r_1) - u_1) = -\alpha(a_1 - u_1) = 33,8$

Eftersom den obekanta funktionen blir bättre approximerad än dess derivata, ger den senare beräkningen noggrannast resultat.

Lösning 2a: På den obelastade yttre begränsningslinjen, Γ_o , är normal- och tangentialspänningarna 0. På den inre randen, Γ_i , är traktionvektorn ortogonal mot ytan och ha beloppet p , dvs vi har $t = -pn$. För en symmetrirand gäller att förskjutningen ortogonalt randen är noll och att spänningen tangentiellt randen

är noll. Sammanfattningsvis:

$$\begin{cases} t_x = t_y = 0 & \text{på } \Gamma_o \\ t_x = -pn_x, \ t_y = -pn_y & \text{på } \Gamma_i \\ u_x = 0, \ t_y = 0 & \text{på } \Gamma_v \\ t_x = 0, \ u_y = 0 & \text{på } \Gamma_h \end{cases}$$


Utveckla nu randintegralen genom att sätta in kända belastningar (traktionkomponenter)

$$\oint_{\Gamma} v^T t d\Gamma = \int_{\Gamma_o} v^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_i} v^T (-p)n d\Gamma + \int_{\Gamma_v} \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_h} \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t_y \end{bmatrix} d\Gamma$$

På Γ_v och Γ_h är t_x respektive t_y obekanta, så för att bli av med dessa väljer vi v_x och v_y så att

$v_x = 0$ på Γ_v och $v_y = 0$ på Γ_h . Randtermen blir då $\oint_{\Gamma} v^T t d\Gamma = -p \int_{\Gamma_i} v^T n d\Gamma$

Lösning 2b: Approximera de obekanta förskjutningarna, $u_x \approx u_{xh} = \sum_i a_{ix} N_i$ och

$u_y \approx u_{yh} = \sum_i a_{iy} N_i$, där a_{ix} och a_{iy} är obekanta nodvariabler, medan $N_i = N_i(x, y)$ är valda basfunktioner. Om vi definierar

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad a = [a_{1x} \ a_{1y} \ \dots \ a_{nx} \ a_{ny}]^T$$

kan vi skriva $u \approx u_h = Na$. Vidare ska testfunktionerna enligt Galerkin vara en godtycklig lineärkombination av basfunktionerna (alternativt: väljs i tur och ordning som

$$v = \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} N_n \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_n \end{bmatrix}); \text{ låt } c = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{2n-1} \ c_{2n}]^T \text{ vara en kolumnvektor med } 2n \text{ god-}$$

tyckligt valda koefficienter. Vi har då $v = Nc$. Insättning i den svaga formen ger nu

$$\int_{\Omega} (\tilde{\nabla} Nc)^T D \tilde{\nabla} (Na) d\Omega + p \int_{\Gamma_i} (Nc)^T n d\Gamma = c^T \left[\int_{\Omega} (\tilde{\nabla} N)^T D \tilde{\nabla} N d\Omega a + p \int_{\Gamma_i} N^T n d\Gamma \right] = 0$$

Eftersom c är en godtycklig vektor måste uttrycket inom parentes vara en nollvektor, så med

$$B = \tilde{\nabla} N \text{ fås alltså } \int_{\Omega} B^T D B d\Omega a = -p \int_{\Gamma_i} N^T n d\Gamma \text{ eller } Ka = f.$$

För ett element med 3 noder har vi 3 noll-skilda basfunktioner och alltså $N^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e \end{bmatrix}$.

$$\text{Vi får då } B^e = \tilde{\nabla} N^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Lösning 2c: Adaptivitet minskar diskretiseringsfelet, som är störst där (exakta) lösningens 2a-derivator är stora. Spänningarna är 1a-derivator av lösningen, så vi ser att 2a-derivatorna är på formen r^{-2} , dvs de avtar med ökande radiell koordinat. Elementstorleken bör alltså växa med ökande avstånd från origo, vilket passar in på båda elementnäten. I problemet förekommer inga punkter där man kan förvänta sig att den analytiska lösningen är sigulär, så man bör inte få lokala områden med mycket små elementstorlekar. Det vänstra av de två visade diskretiseringarna verkar därför troligast.

Lösning 2d: De cirkulära begränsningslinjerna approximeras med polygoner, så FE-approximationen görs på ett område som skiljer sig från Ω .

Lösning 3a: Isoparametriska element innebär att basfunktionerna $N_i^e(\xi, \eta)$ används som form-

$$\text{funktioner — avbildningen görs då som } x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 x_i N_i^e \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 y_i N_i^e, \text{ där } (x_i, y_i) \text{ är}$$

koordinaten för nod i . Eftersom basfunktionerna är polynom, beräknar vi enkelt derivatorna

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} = x_2 - x_1, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} = x_3 - x_1 \text{ och motsvarande för derivatorna av } y, \text{ dvs vi}$$

$$\text{får } \frac{\partial y}{\partial \xi} = y_2 - y_1 \text{ och } \frac{\partial y}{\partial \eta} = y_3 - y_1$$

Basfunktionernas derivator med avseende på x och y (som behövs för att ställa upp B^e) fås med kedjeregeln:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\text{där alltså } \mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \text{ Med}$$

$$\mathbf{J}^{-T} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)} \begin{bmatrix} (y_3 - y_1) & -(y_2 - y_1) \\ -(x_3 - x_1) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix}$$

$$\text{fås då de sökta derivatorna som } \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} \text{ För t.ex } i = 2 \text{ fås}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_2^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}$$

Lösning 3b: Gör en variabelsubstitution och integrera i det lokala koordinatsystemet; eftersom

$\det \mathbf{J} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$ är konstant för 3-nodselementet och elementarean är $\frac{1}{2}$ i

$$\text{det lokala systemet fås trivialt } A^e = \int_{A^e} dA = \int_0^{1-\xi} \int_0^\xi \det \mathbf{J} d\eta d\xi = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}{2}$$

TENTAMEN I FINIT ELEMENTMETOD — MHA 021

8 JANUARI 2018

Tid och plats:	14 ⁰⁰ – 18 ⁰⁰ i M-huset
Hjälpmedel:	Typgodkänd räknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505. Besöker sal ca. 15 ⁰⁰ samt 16 ⁰⁰ .
Lösningar:	Anslås på anslagstavlan, avdelningen för dynamik, 9/1; se även kurshemsidan.
Betygsättning:	En fullständig och korrekt lösning på en uppgift ger poäng enligt vad som anges på uppgiftslappen. Smärre fel leder till poängavdrag. Ofullständig lösning (svar på ställt problem saknas) eller omfattande fel ger inte något poäng. Maximal poäng är 20. Det krävs 8 poäng för betyg 3; 12 poäng ger betyg 4; för betyg 5 krävs 16 poäng. Observera att ovanstående är betygssättning på enbart tentamen; för godkänd examination krävs dessutom godkända inlämningsuppgifter.
Resultatlista:	Anslås senast 22/1 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 26/1 — för kursdeltagare som inte har alla inlämningsuppgifter godkända vid detta tillfälle inrapporteras betyget U (underkänd).
Granskning:	onsdag 24/1 12–15, plan 3 i Nya M-huset.

Lösningar

Tänk på:

- Skriv så att den som ska rätta kan läsa och förstå hur du tänker. Den som rättar tentamen gissar inte eller antar inte vad du menar/tänker — endast vad som verkligen skrivs har betydelse vid bedömningen av en lösning.
- **Förklara/definiera införda beteckningar.**
- Rita tydliga figurer. Ange i förekommande fall vad som är positiva/negativa riktningar (på t.ex. förskjutningar och krafter).
- Gör du antaganden utöver de som anges i uppgiftstexten, så ange detta explicit och förklara dessa.

Låt Ω vara ett område i (x, y) -planet och beteckna dess rand med Γ ; $\mathbf{n}$ är en utåtriktad enhetsnormal till området. Vidare låter vi $v = v(x, y)$ vara en (skalär) funktion och $\mathbf{q} = [q_x(x, y) \ q_y(x, y)]^T$ en vektorvärd funktion, som båda är definierade på Ω . Då gäller

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{q} d\Omega = \oint_{\Gamma} \mathbf{q}^T \mathbf{n} d\Gamma \quad (\text{divergensteoremet})$$

där $\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}$, samt

$$\int_{\Omega} v \operatorname{div} \mathbf{q} d\Omega = \oint_{\Gamma} v \mathbf{q}^T \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla v)^T \mathbf{q} d\Omega \quad (\text{Green-Gauss sats})$$

där $(\nabla v)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$.

1

Betrakta stationär värmeledning genom en sfärisk vägg. Om väggens inner- och ytterradie är r_i respektive r_o , och temperaturen är u_i på insidan och u_o på utsidan, så ges temperaturen $u(r)$ som lösningen till randvärdesproblemet

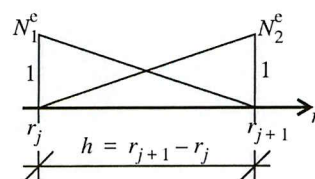
$$\begin{cases} -\frac{d}{dr} \left[kr^2 \frac{du}{dr} \right] = 0 & r_i < r < r_o \\ u(r_i) = u_i \\ u(r_o) = u_o \end{cases}$$

där k är värmeledningskoefficienten (termisk konduktivitet).

a: Variationsformulera problemet. (2p)

b: FE-formulera problemet med testfunktioner enligt Galerkins metod och härled elementstyvhetismatrisen för ett element med två lineära basfunktioner. (2p)

c: Betrakta en sfär med $r_i = 1,0$ m och $r_o = 2,0$ m. Använd två lineära element för att approximera temperaturen mitt i väggen, om $u_i = 30^\circ\text{C}$ och $u_o = 0^\circ\text{C}$. (2p)



Lösning 1a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion $v = v(r)$ och integrera över

intervallet: $\int_{r_i}^{r_o} v \frac{d}{dr} \left[kr^2 \frac{du}{dr} \right] dr = 0$. Partiell integration ger $\int_{r_i}^{r_o} kr^2 \frac{dv}{dr} \frac{du}{dr} dr = \left[kr^2 v \frac{du}{dr} \right]_{r_i}^{r_o}$. Eftersom $\frac{du}{dr}$ är

obekant vid $r = r_i$ och vid $r = r_o$, måste vi här begränsa våra val av testfunktion så att

$v(r_i) = v(r_o) = 0$. Variationsproblemet blir då: Bestäm u så att

$$\int_{r_i}^{r_o} kr^2 \frac{dv}{dr} \frac{du}{dr} dr = 0 \quad u(r_i) = u_i \quad u(r_o) = u_o \quad v(r_i) = v(r_o) = 0$$

Lösning 1b: Approximera u med en linjärkombination av basfunktioner $N_i(r)$: $u \approx u_h = Na$, med basfunktionerna $N = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n]$ och nodvariablerna $a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T$. Approximation sätts in i variationsproblemet och testfunktionerna väljs enligt Galerkin, dvs $v = N_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; vi får då

$$\int_{r_i}^{r_o} kr^2 \frac{dN_i}{dr} \frac{du_h}{dr} dr = 0, i = 1, 2, \dots, n \text{ — eller på matrisform: } \int_{r_i}^{r_o} kr^2 \left(\frac{dN}{dr} \right)^T \frac{dN}{dr} dr a = 0.$$

För ett element med två lineära basfunktioner $N^e = [N_1^e \ N_2^e]$ på intervallet $r_j \leq r \leq r_{j+1}$ har vi

$\frac{dN^e}{dr} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$, där $h = r_{j+1} - r_j$ är elementets längd. Detta ger att $\left(\frac{dN^e}{dr} \right)^T \frac{dN^e}{dr} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ är konstant. Vi får då:

$$K^e = \int_{r_j}^{r_{j+1}} kr^2 \left(\frac{dN^e}{dr} \right)^T \frac{dN^e}{dr} dr = \frac{k}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_{r_j}^{r_{j+1}} r^2 dr = \frac{k}{3h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} [r^3]_{r_j}^{r_{j+1}} = \frac{k(r_{j+1}^3 - r_j^3)}{3h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning 1c: Med två lika långa element har vi nodkoordinaterna $r_1 = r_i = 1,0$ m,

$r_2 = \frac{r_i + r_o}{2} = 1,5$ m och $r_3 = r_o = 2,0$ m; båda elementen har längden $h = 0,5$ m. Elementstyvhetsmatriserna blir $K_1^e = \frac{k(r_2^3 - r_1^3)}{3h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ respektive $K_2^e = \frac{k(r_3^3 - r_2^3)}{3h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Assemblering ger då

$$\frac{k(r_2^3 - r_1^3)}{3h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \frac{k(r_3^3 - r_2^3)}{3h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{k}{3h^2} \begin{bmatrix} (r_2^3 - r_1^3) & -(r_2^3 - r_1^3) & 0 \\ -(r_2^3 - r_1^3) & (r_3^3 - r_1^3) & -(r_3^3 - r_2^3) \\ 0 & -(r_3^3 - r_2^3) & (r_3^3 - r_2^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = Ka$$

Ekvationssystemet blir då

$$\frac{k}{3h^2} \begin{bmatrix} (r_2^3 - r_1^3) & -(r_2^3 - r_1^3) & 0 \\ -(r_2^3 - r_1^3) & (r_3^3 - r_1^3) & -(r_3^3 - r_2^3) \\ 0 & -(r_3^3 - r_2^3) & (r_3^3 - r_2^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

där f_1 och f_3 beror av den okända randtermen (se lösning 1a); eftersom N_1 och N_3 inte uppfyller kraven på testfunktionerna ($v(r_i) = v(r_o) = 0$) måste vi stryka första och tredje ekvationen. Vidare ger randvillkoren att $a_1 = 30^\circ\text{C}$ och $a_3 = 0^\circ\text{C}$, så vi får

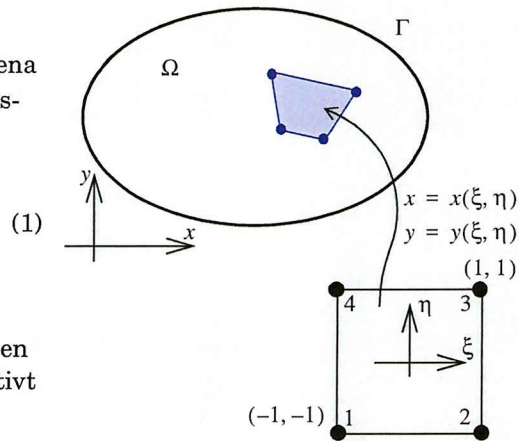
$$\frac{k}{3h^2} \begin{bmatrix} -(r_2^3 - r_1^3) & (r_3^3 - r_1^3) & -(r_3^3 - r_2^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30^\circ\text{C} \\ a_2 \\ 0^\circ\text{C} \end{bmatrix} = 0$$

ur vilket $a_2 = \frac{(r_2^3 - r_1^3) \cdot 30^\circ\text{C}}{(r_3^3 - r_1^3)} \approx 10,2^\circ\text{C}$

2

Ett så kallat fältproblem på ett område Ω med homogena Dirichletvillkor på randen Γ , definieras av randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(D\nabla\phi) = b & \text{i } \Omega \\ \phi = 0 & \text{på } \Gamma \end{cases} \quad (1)$$



där $b = b(x, y)$ är en bekant källterm ('belastning'), D en bekant konstitutiv matris som är symmetrisk och positivt definit, samt $\phi = \phi(x, y)$ den sökta funktionen.

- a: Härled den svaga formen av randvärdesproblemet (1) och gör sedan en finit-elementformulering med testfunktioner enligt Galerkins metod. Ange ett uttryck för en elementstyvhetsmatris och visa hur man får fram ett uttryck för den så kallade B^e -matrisen. (3p)
- b: Antag att vi vill använda isoparametiska bilineära element där bas- och formfunktioner ställs upp i ett lokalt koordinatsystem $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$. Visa hur derivatorna som behövs för att ställa upp B^e -matrisen beräknas. (Du behöver inte teckna explicita uttryck för form- eller basfunktioner, men definiera alla beteckningar du inför). (2p)

Lösning 2a: Multiplicera differentialekvationen med en testfunktion v och integrera över området:

$$-\int_{\Omega} v \operatorname{div}(D\nabla\phi) d\Omega = \int_{\Omega} v b d\Omega. \text{ Använd nu Green-Gauss sats; vi får:}$$

$$\int_{\Omega} (\nabla v)^T D(\nabla\phi) d\Omega = \oint_{\Gamma} v(D\nabla\phi)^T n d\Gamma + \int_{\Omega} v b d\Omega$$

Ingående funktioner måste vara tillräckligt reguljära för att detta uttryck ska ha någon mening — funktionerna måste vara kvadratiskt integrerbara och ha kvadratiskt integrerbara första derivator. Därtill måste testfunktionerna uppfylla $v = 0$ på Γ , eftersom integranden i randintegralen är obekant ($(D\nabla\phi)^T n$ är okänd). Testfunktionen måste alltså satisfiera *homogena väsentliga* randvillkor. Låt V vara rummet av funktioner som uppfyller dessa villkor. Variationsproblemet kan då

$$\text{skrivas: Hitta } \phi \in V \text{ så att } \int_{\Omega} (\nabla v)^T D(\nabla\phi) d\Omega = \int_{\Omega} v b d\Omega \quad \forall v \in V$$

Välj n basfunktioner N_i ur V (konform metod) och låt $V_h \subset V$ vara rummet av alla funktioner som kan uttryckas som en lineärkombination av basfunktionerna. Speciellt approximerar vi

$$\phi \approx \phi_h = \sum_{i=1}^n N_i a_i \text{ och beräknar nodvariablerna } a_i \text{ så att variationsproblemet satisfieras i } V_h \text{ (Galer-$$

$$\text{kins metod). Alltså har vi: Hitta } \phi_h \in V_h \text{ så att } \int_{\Omega} (\nabla v)^T D(\nabla\phi_h) d\Omega = \int_{\Omega} v b d\Omega \quad \forall v \in V_h$$

För ett element med m basfunktioner, dvs ett på vilket bara $m < n$ av de n basfunktionerna har noll-skilda funktionsvärden, kan FE-approximationen skrivas

$$\phi_h = \begin{bmatrix} N_1^e & \dots & N_m^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^e & \dots & a_m^e \end{bmatrix}^T = N^e a^e, \text{ s\aa att } \nabla \phi_h = \nabla(N^e a^e) = (\nabla N^e) a^e = B^e a^e, \text{ d\aa r allts\aa}$$

$$B^e = \nabla N^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_m^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_m^e}{\partial y} \end{bmatrix}. \text{ Elementstyvhetsmatrisen f\o r ett element \o ver ytan } \Omega_e \text{ f\aa s nu som}$$

$$\text{bidraget till FE-formuleringens v\aa nsterled: } K^e = \int_{\Omega_e} B^{eT} D B^e d\Omega$$

L\o sning 2b: Isoparametriska element inneb\aa r att basfunktionerna $N_i^e(\xi, \eta)$ anv\aa nds som form-

$$\text{funktioner — avbildningen g\o rs d\aa som } x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 x_i N_i^e \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 y_i N_i^e, \text{ d\aa r } (x_i, y_i) \text{ \aa r}$$

koordinaten f\o r nod i . Eftersom basfunktionerna \aa r polynom, ber\aa knar vi enkelt derivatorna

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \text{ och motsvarande f\o r derivatorna av } y.$$

Basfunktionernas derivator med avseende p\aa x och y (som beh\o vs f\o r att st\aa lla upp B^e) f\aa s med kedjeregeln:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\text{d\aa r allts\aa } J^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \text{ Med } J^{-T} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \det J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \text{ f\aa s d\aa de s\o kta deriva-}$$

$$\text{torna som } \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-T} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

3

Med lämplig definition av de inre produkterna $a(*, *)$ och $(*, *)$, kan den svaga formuleringen av problemet i föregående uppgift skrivas

$$\text{Bestäm } \phi \in V \text{ så att } a(\phi, v) = (b, v) \quad \forall v \in V$$

där V är rummet av alla tillräckligt reguljära funktioner som uppfyller homogena väsentliga randvillkor. Låt vidare $V_h \subset V$ vara finita-elementrummet som spänns upp av de valda basfunktionerna; FE-formuleringen kan då skrivas

$$\text{Bestäm } \phi_h \in V_h \text{ så att } a(\phi_h, v) = (b, v) \quad \forall v \in V_h$$

där alltså ϕ_h är finita-elementapproximationen av ϕ .

a: Givet att de inre produkterna är symmetriska och lineära (i båda argumenten), visa att felet $e = \phi - \phi_h$ är ortogonalt mot alla $v \in V_h$, med avseende på $a(*, *)$ (dvs visa Galerkin ortogonalitet). (1p)

b: Visa att $\|e\|_a = \sqrt{\|\phi\|_a^2 - \|\phi_h\|_a^2}$, där $\|*\|_a = \sqrt{a(*, *)}$ är energinormen. (2p)

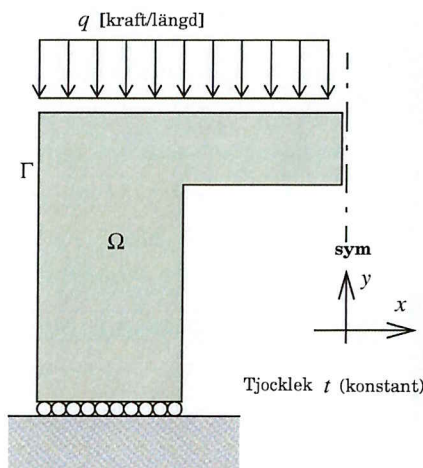
Lösning 3a: Subtrahera FE-problemet från variationsproblemet. Då fås $a(\phi, v) - a(\phi_h, v) = 0$, som gäller för den gemensamma definitionsmängden, dvs för funktioner i V_h . Eftersom $a(., .)$ är lineär i första argumentet fås alltså $a(\phi - \phi_h, v) = a(e, v) = 0 \quad \forall v \in V_h$

Lösning 3b: Kvadera båda sidor av likheten: $\|e\|_a^2 = \|\phi\|_a^2 - \|\phi_h\|_a^2$. Vi ska alltså visa att $a(e, e) = a(\phi, \phi) - a(\phi_h, \phi_h)$. Utnyttja att $a(., .)$ är symmetrisk och lineär i båda argumenten:

$$\begin{aligned} a(e, e) &= a(\phi - \phi_h, \phi - \phi_h) = a(\phi, \phi - \phi_h) - a(\phi_h, \phi - \phi_h) = \\ &= a(\phi, \phi) - a(\phi, \phi_h) - a(\phi_h, \phi) + a(\phi_h, \phi_h) = a(\phi, \phi) + a(\phi_h, \phi_h) - 2a(\phi, \phi_h) = \\ \{ \text{använd att } \phi &= \phi_h + e \text{ i sista termen} \} = a(\phi, \phi) + a(\phi_h, \phi_h) - 2a(\phi_h + e, \phi_h) = \\ &= a(\phi, \phi) + a(\phi_h, \phi_h) - 2a(\phi_h, \phi_h) - 2a(e, \phi_h) = \\ \{ \phi_h &\in V_h \text{ så sista termen är 0 enligt Galerkinortogonalitet} \} = \\ &= a(\phi, \phi) - a(\phi_h, \phi_h) \end{aligned}$$

Vi vill här bestämma de spänningar $\sigma = D(\tilde{\nabla}u)$ som upp-
kommer i en ramkonstruktion, på grund av en randlast
med intensitet (kraft/längd) q . Ramen är symmetrisk med
avseende på y -axeln; av figuren framgår också lastens pla-
cering samt upplagsförhållandena. Om tjockleken t i z -led
är konstant, så kan den svaga formen av de styrande diffe-
rentialekvationerna enligt 2D-elasticitetsteori skrivas

$$\int_{\Omega} (\tilde{\nabla}v)^T D \tilde{\nabla}u d\Omega = \oint_{\Gamma} v^T t d\Gamma \quad (2)$$



Här betecknar Ω och Γ området respektive randen. Vidare

är D en given konstitutiv matris (symmetrisk och positivt definit), $v = [v_x \ v_y]^T$ är en vektor med
testfunktioner, $u = [u_x \ u_y]^T$ är den obekanta förskjutningsvektorn,

$$t = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y \\ \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y \end{bmatrix}$$

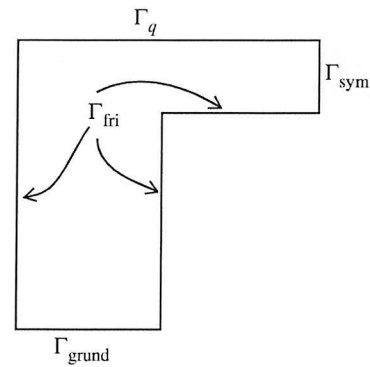
är traktionvektorn och $\tilde{\nabla}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$. Observera att i (2) har vi inte infört randvillkoren. Efter-

som problemet är symmetriskt nöjer vi oss med att studera halva området (enligt figuren).

- Ange för detta fall samtliga randvillkor. Utveckla sedan randintegralen i (2) med hänsyn till randvillkoren samt med beaktande av villkoren på testfunktionerna. (2p)
- FE-formulera problemet — ta hänsyn till randvillkoren. Av din lösning ska det framgå hur den obekanta vektorn u approximeras. Visa också hur B^e -matrisen ser ut för ett element med 4 noder. (2p)
- I vilket eller vilka områden ska man förvänta sig att diskretiseringsfelet är störst, om Ω delas in i element som alla är ungefär lika stora? Motivera ditt svar. (1p)
- Antag att vi har tillgång till en funktion som med numerisk integration beräknar elementstyhetsmatrisen för ett 4-nods isoparametriskt element, $K^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^{eT} D B^e \det J d\xi d\eta$ för Poissons ekvation. Vilka förändringar behöver göras för att istället generera elementstyhetsmatrisen till ett elasticitetsproblem? (1p)

Lösning 4a: Dela in Γ i delränder enligt figuren. På den fria obelastade randen Γ_{fri} är normal- och tangentialspänningen noll; på den belastade randen Γ_q är tangentialspänningen noll medan $t_y = \sigma_{yy} = -q/t$. På symmetriranden är tangentialspänning och horisontell förskjutning noll. Utmed infästningen, Γ_{grund} , är vertikal förskjutning och tangentialspänning noll. Sammanfattningsvis har vi

$$\begin{aligned} t_x = t_y = 0 \text{ på } \Gamma_{\text{fri}} & \quad t_x = 0, t_y = \frac{-q}{t} \text{ på } \Gamma_q \\ u_x = 0, t_y = 0 \text{ på } \Gamma_{\text{sym}} & \quad t_x = 0, u_y = 0 \text{ på } \Gamma_{\text{grund}} \end{aligned}$$



Utveckla nu randintegralen och sätt in kantbelastningen

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v}^T \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Gamma_{\text{fri}}} \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -q/t \end{bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{sym}}} \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ 0 \end{bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{grund}}} \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t_y \end{bmatrix} d\Gamma$$

På Γ_{sym} och Γ_{grund} är t_x respektive t_y obekanta ('reaktionskrafter/yta'), så för att bli av med dessa väljer vi v_x och v_y så att $v_x = 0$ på Γ_{sym} och $v_y = 0$ på Γ_{grund} . Randtermen blir då

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v}^T \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Gamma_q} \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -q/t \end{bmatrix} d\Gamma$$

Lösning 4b: Approximera den obekanta förskjutningsvektorn genom $\mathbf{u} \approx \begin{bmatrix} u_{xh} \\ u_{yh} \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a}$ där

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix}$$

innehåller valda basfunktioner, och

$$\mathbf{a} = [a_{x1} \ a_{y1} \ a_{x2} \ a_{y2} \ \dots \ a_{xn} \ a_{yn}]^T$$

är obekanta nodvariabler. Vi har då $\tilde{\nabla} \mathbf{u} \approx \tilde{\nabla} \mathbf{u}_h = \tilde{\nabla} \mathbf{N} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{a}$ där

$$\mathbf{B} = \tilde{\nabla} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Sätt in approximationen i den svaga formen och välj testfunktioner enligt Galerkin

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} N_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} N_n \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ N_n \end{bmatrix}$$

Om ekvationerna samlas radvis i ett ekvationssystem fås

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \mathbf{a} = \int_{\Gamma_q} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ \dots & \dots \\ N_n & 0 \\ 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -q/t \end{bmatrix} d\Gamma$$

eller $\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}$ med $\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$ och $\mathbf{f} = \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -q/t \end{bmatrix} d\Gamma$

För ett element med 4 noder har vi 4 noll-skilda basfunktioner och alltså

$$\mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e & 0 & N_4^e & 0 \\ 0 & N_1^e & 0 & N_2^e & 0 & N_3^e & 0 & N_4^e \end{bmatrix}. \text{ Vi har alltså}$$

$$\mathbf{B}^e = \tilde{\nabla} \mathbf{N}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1^e & 0 & \dots & N_4^e & 0 \\ 0 & N_1^e & \dots & 0 & N_4^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_4^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_4^e}{\partial y} & \frac{\partial N_4^e}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Lösning 4c: Vid det inåtvända hörnet har vi en singularitet där spänningarna (förstaderivator) ändras snabbt över en kort sträcka, dvs vi har stora andraderivator här. Därför måste man förvänta sig störst diskretiseringsfel i området närmast denna punkt.

Lösning 4d: Med Poissons ekvation har vi bara en obekant funktion $u = u(x, y)$ så approximationen på elementet är $u \approx u_h = \mathbf{N}^c \mathbf{a}^c$ med basfunktionerna $\mathbf{N}^c = \begin{bmatrix} N_1^c & N_2^c & N_3^c & N_4^c \end{bmatrix}$ och motsvarande nod-

variabler samlade i $\mathbf{a}^c$, samt differentialoperatoren $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$ (istället för $\tilde{\nabla}$), så vi har $\mathbf{B}^c$ -matrisen:

$$\mathbf{B}^c = \nabla \mathbf{N}^c = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^c}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_4^c}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^c}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_4^c}{\partial y} \end{bmatrix}. \text{ Basfunktionernas derivatorna beräknas som innan eftersom den isopara-}$$

metriska avbildningen är oförändrad, men vi måste nu ställa upp en annan $\mathbf{B}^c$ -matris (se uppgift 4b ovan).

Den konstitutiva matrisen $\mathbf{D}$, som i det (2D) skalära problemet är en 2×2 matris, är i elasticitetsproblemet en 3×3 matris, så elementstyvhetsmatrisen blir nu 8×8 , jämfört med 4×4 i fallet Poissons ekvation.